ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS Y CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UN CASO EN ÁLGEBRA ESCOLAR

TEACHING STRATEGIES AND MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE. A CASE IN SCHOOL ALGEBRA

Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional, México
isandoval@upn.mx

Armando Solares Rojas
Universidad Pedagógica Nacional, México
asolares@g.upn.mx

Montserrat García-Campos
Universidad Pedagógica Nacional, México
mgarciac@g.upn.mx

Presentamos los resultados del análisis de los conocimientos puestos en acción por una maestra de matemáticas de secundaria en su práctica en el aula. Éstos toman forma y se despliegan como estrategias didácticas específicas para gestionar su clase cuando incorpora Computer Algebra Systems. A partir de observaciones no participantes de clases cotidianas y entrevistas, encontramos que los conocimientos de esta maestra (matemáticos, didácticos y tecnológicos) son movilizados en varios momentos y a través de diversas estrategias didácticas. Ello depende de una amplia diversidad de factores entre los que destacan el objetivo de la planeación, el momento específico de la clase, las participaciones de los estudiantes y el uso de la herramienta tecnológica. En esta complejidad la maestra aplica sus estrategias didácticas de manera flexible y logra controlar e incluso modificar la gestión de su clase.

Palabras Clave: Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Álgebra y Pensamiento Algebraico, Educación Secundaria, Technology

Introducción

Para acercarse al conocimiento profesional del profesor de matemáticas y sus prácticas han surgido diferentes marcos de análisis, metodologías y propósitos que aún siguen en refinamiento y en discusión al interior de la propia comunidad (Ball, Thames y Phelps, 2008; Ponte y Chapman, 2006; Gaeber y Tirosh, 2008). Ponte y Chapman (2006) sugieren tomar en cuenta la estrecha relación de este tipo de conocimiento y la práctica, las condiciones de trabajo y los objetivos explícitos e implícitos de dicha labor. Por su parte, Davis (2014) señala que el conocimiento necesario para un profesor de matemáticas es una red compleja en la que interactúan "una mezcla de varias asociaciones/instanciaciones de conceptos matemáticos y una conciencia de procesos complejos en los cuales se producen las matemáticas" (p. 155). De hecho, el conocimiento del profesor es "enactuado (puesto en acción/*To be enacted*) e implícito" (p. 155).

La investigación sobre el uso de Tecnologías Digitales (TD) para la enseñanza de las matemáticas es amplia. Se ha encontrado que la incorporación de Computer Algebra Systems (CAS) a los salones de clases generan cambios en las prácticas matemáticas (Pierce y Stacey, 2004) y que el profesor es central para proveer condiciones que ayuden a los estudiantes a su comprensión matemática, con uso de estas herramientas (McFarlane, Williams y Bonnett, 2000).

Elegimos el tema de la enseñanza del álgebra con CAS debido a que una de las ventajas de esta herramienta es que puede usarse para proveer de significado a las transformaciones y expresiones algebraicas. Numerosas investigaciones han mostrado evidencia sólida de que la tecnología puede ser un elemento activo en la construcción de significados de los conocimientos algebraicos. (Puig & Rojano, 2004; Hitt y Kieran, 2009; Kieran y Drijvers, 2006; o bien por Solares y Kieran, 2013.) Nuestro estudio se ubica en esta línea, centrándose en el estudio de los conocimientos y las prácticas docentes en clases cotidianas de álgebra con CAS. Buscamos profundizar en la comprensión de cómo los profesores movilizan estos conocimientos (matemáticos, didácticos y tecnológicos) y les dan

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

sentido en términos de sus prácticas (Ponte y Chapman, 2006). Específicamente buscamos responder: ¿Cómo los conocimientos didácticos y matemáticos se ponen en acción durante una clase en la que se usa CAS? y ¿cómo estos conocimientos se manifiestan por medio de las estrategias didácticas?

Perspectiva Teórica: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Nos interesa identificar los conocimientos puestos en acción por un profesor cuando enseña álgebra con el uso de CAS a partir del análisis de sus estrategias didácticas. Para considerar la especificidad de este conocimiento respecto a la enseñanza del álgebra escolar y para efectos de análisis partimos del modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK por sus siglas en inglés) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013).

Este modelo se refiere al conocimiento específico (en su conjunto) del profesor de matemáticas el cual se compone de dos dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). El primer dominio está compuesto de tres subdominios: Conocimiento de los Temas, de la Estructura de la Matemática y de la Práctica Matemática. El segundo, el Conocimiento Didáctico del Contenido, está compuesto por: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas.

Por las características de nuestro objeto de investigación, nos centramos en el segundo dominio (PCK). A continuación, describimos brevemente en qué consiste cada uno de los tres subdominios que lo componen. El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT) está vinculado con estrategias y teorías de enseñanza, materiales y recursos vinculados con el contenido a enseñar; el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) incluye asuntos sobre cómo se aprenden ciertos conceptos, intuiciones, errores y formas como los alumnos interactúan con cierto contenido matemático y, finalmente, el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) se refiere a lo qué es esperable (en términos del propio currículo) en un nivel escolar determinado incluyendo también las indicaciones y formas de aprender dicho contenido desde un "referente estandarizado" (p. 598).

Lo anterior da cuenta de la complejidad en la que está inmersa la tarea de enseñanza de un profesor al momento de impartir su clase. Sin embargo, no todos los conocimientos se adquieren en instancias institucionales, muchos de ellos se construyen en la práctica de aula, en el intercambio con otros colegas y en el propio contexto donde se realiza la tarea de enseñar. Desde nuestra perspectiva los conocimientos de los profesores para la enseñanza de las matemáticas se ponen en acción y toman forma específica como estrategias didácticas que ellos modifican al momento de gestionar su clase.

Metodología

Los tres investigadores participamos en el análisis de los videos de las clases de una maestra de matemáticas de secundaria en México (voluntaria) con experiencia en el uso de tecnología y con disponibilidad para ser grabada. Esta maestra participó previamente, junto con otros profesores, en un taller de 20 horas sobre CAS con la calculadora (TI-82). De manera general, el taller trató sobre cómo resolver problemas algebraicos usando las funciones *factorizar, desarrollar, resolver* y *evaluar*. La discusión en el taller estuvo centrada en las diferentes maneras en las que se puede resolver un problema algebraico con calculadora, así como cuándo es adecuado usar CAS en una clase, cómo y para qué. Decidimos observar y grabar dos clases regulares de la maestra, sin que los investigadores determináramos el tema y tratamiento didáctico al mismo. La maestra durante el taller mostró tener conocimiento de las reglas del CAS y su uso con la calculadora, así como, habilidades para explorar nuevas situaciones relacionadas con las reglas propias de esta herramienta y proponer nuevos usos a sus alumnos. Cabe señalar que se han reportado resultados de otro estudio

(García-Campos & Rojano, 2008) en el que se menciona que para que el uso de CAS logre impactar en la práctica docente es necesario brindar mayor acompañamiento a los profesores, pues a corto plazo éstos no logran incorporar CAS de manera cotidiana en el aula.

En este reporte nos centraremos en los resultados del análisis de la práctica de la maestra Clementina, de quien sabemos que en el momento de la investigación tenía más de 20 años de experiencia dando clases en secundaria, dominaba los contenidos a enseñar y conocía las componentes de la calculadora que permiten tener, de manera simultánea, distintas representaciones para los objetos algebraicos (tablas, gráficas y expresiones algebraicas), y las instrucciones para resolver ecuaciones.

Para el análisis de los datos se hizo una transcripción de los episodios que los tres investigadores seleccionaron al haber identificado conocimientos didácticos del contenido expresados a través de las siguientes estrategias didácticas.

Estrategias Didácticas como un Acercamiento a Aspectos del Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático

Los autores proponemos estas tres estrategias didácticas como resultado de un estudio más amplio en el que se ha estado trabajando mediante el análisis de videos de clases de más profesores de matemáticas de secundaria (incluso telesecundaria). En dichas clases hemos identificado estas estrategias, las cuales dan cuenta además de algunos de los conocimientos especializados que los profesores generan y movilizan al momento de impartir sus clases (*To be enacted*) como lo señala Davis (2014). Los resultados de tal investigación serán comunicados ampliamente en un futuro.

En el análisis de los videos de las clases de Clementina identificamos que su conocimiento especializado se manifestó en tres estrategias didácticas:

- Mantenimiento de la planeación de la clase. Consiste en la toma de decisiones para mantener el desarrollo de la clase de tal manera que se cumplan los propósitos de aprendizaje que planteó el profesor considerando el contenido del currículo a enseñar y los recursos a su disposición. Estas decisiones son, por ejemplo, elección de soluciones, procedimientos y errores para discutir o mostrar con el grupo completo, recapitulaciones, balances, formalizaciones, etc. En esta estrategia se hace énfasis en los conocimientos del profesor en los subdominios KMT y KMLS.
- Rol otorgado a los estudiantes. Un mismo profesor puede promover distintas formas de participación en sus estudiantes en una misma clase (KMT). Por ejemplo, que exploren sus soluciones y las expongan, que pasen al pizarrón o usen CAS (con el TI presenter) para explicar sus procedimientos, soluciones o hipótesis, o que simplemente sigan las instrucciones.
- Usos de las herramientas tecnológicas. Los profesores proponen el uso de los recursos tecnológicos disponibles para verificar resultados, explorar procedimientos y soluciones, aplicar técnicas, entre otras. (KMT y KFLM)

En este reporte nos centraremos en los resultados del análisis de la práctica de una maestra que llamaremos Clementina. De la entrevista, sabemos que en el momento de la investigación Clementina tenía más de 20 años de experiencia dando clases en secundaria, dominaba los contenidos a enseñar y conocía las componentes de la calculadora que permiten tener, de manera simultánea, distintas representaciones para los objetos algebraicos (tablas, gráficas y expresiones algebraicas), y las instrucciones para resolver ecuaciones.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Análisis y Discusión. El Caso de Clementina

A continuación, presentamos resultados del uso de las estrategias para dar cuenta del tipo de conocimiento que Clementina moviliza en la clase. Este análisis nos permite describir la dinámica de cómo las componentes del MTSK se entretejen. La maestra tiene una *planeación* detallada y precisa de su clase usando CAS. Ha preparado un problema específico. Al parecer, ella misma lo redactó o hizo la adaptación correspondiente. Tanto en la planeación como en el desarrollo de la clase se evidencian dominio y experiencia en el manejo de las ecuaciones de primer grado (KMLS), cómo enseñarlas (KMT) y las diferentes posibilidades de sus alumnos para abordar la tarea propuesta (KFLM).

Breve Descripción de las Acciones de la Maestra en la Clase

Al inicio de la sesión, la maestra dicta el problema, el objetivo y da instrucciones de cómo trabajar en la clase, como se muestra en el siguiente fragmento.

> Maestra: Tema: Ecuaciones lineales. Propósito general: Despejar literales en diferentes tipos de fórmulas. Relacionar una fórmula con la tabla de datos que genera y con su gráfica.
> Problema: En una tienda se compran 9 paquetes de libros, el cual tiene un precio adicional de $75 [sic]. ¿Cuánto cuesta cada paquete si en total se pagan $1400?
> Maestra: Leer el problema. Ya que lo tengas planteado, puedes usar la calculadora para resolverlo. Lo pueden resolver entre tres o dos o uno, los que sean en cada mesa.
> [Fragmento 1, sesión 1]

A pesar de que sus clases son muy estructuradas y se desarrollan de acuerdo a la planeación definida, se observa que en su práctica siempre da un momento de reflexión y lectura del problema, seguido de uno de exploración con los recursos y estrategias que los alumnos decidan. Los alumnos usan la calculadora libremente y levantan la mano para preguntar dudas a la maestra. Ella recorre el salón, pasando entre los equipos y aclarando las dudas que surgen. Consideramos que ésta es una manifestación de su conocimiento sobre cómo se aprende este contenido (KFLM).

Un Problema Didáctico no Previsto en la Planeación

Un problema didáctico que emerge en la clase está vinculado con la palabra "adicional" usada en la redacción del enunciado del problema. Los estudiantes tienen problemas para interpretar a qué se refiere y, espontáneamente, comienzan a explorar con valores numéricos específicos. Entonces la maestra interviene de la siguiente manera.

> Maestra: Tu compañera dice que cuando se emplea el término *adicional* se está refiriendo …
> Alumna: A que le tienes que aumentar.
> Maestra: En este caso, ¿cuánto le tienes que aumentar?
> Alumna: 75
> Maestra: ¿Cómo quedaría tu ecuación? […] ¿En qué consiste el problema? Tú vas a elaborar una tabla [se dirige a una estudiante] ¿En base a qué vas a elaborar la tabla?
> [Fragmento 2, sesión 1]

En el fragmento 2 podemos identificar dos intervenciones de la maestra. La primera es para ayudar en la traducción del problema al lenguaje algebraico. La palabra *adicional* se traduce como *aumentar* o *sumar*. La segunda ayuda consiste en sugerir que se enfoquen primero en encontrar una ecuación que modele el problema. Además, les dice a sus alumnos que partir de la ecuación podrán hacer cuentas, encontrar valores y construir la tabla de variación correspondiente, al revés de lo que ellos están haciendo: explorar con valores numéricos para establecer la ecuación. Cabe señalar que en México es una práctica recurrente obtener primero la expresión algebraica y después la tabla o la gráfica. Esto se propicia desde el mismo programa de estudios (SEP, 2011).

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Desde nuestra perspectiva, lo anterior es una manifestación de que la maestra aplica la primera estrategia: *mantiene la planeación de la clase*. Aunque los estudiantes exploran con ejemplos numéricos con objeto de establecer las relaciones dadas en el problema, Clementina interviene para orientar esos procedimientos y hallar la ecuación que modele el problema (KFLM y KMT). De esta manera, resuelve el problema didáctico que se le presentó y mantiene su planeación.

Pero las dudas y confusión continúan. Entonces, la maestra hace una intervención grupal. Toma las dudas de uno de los estudiantes para discutirlas y aclararlas grupalmente. El estudiante ha estado probando con varios posibles valores para el costo de cada paquete. Al parecer, ha recurrido al *ensayo y error* (aproximaciones numéricas sucesivas) para ajustar los valores.

Maestra: ¿Qué es lo que quiere saber tu problema? [inaudible] Quiere saber cuánto cuesta un paquete, ¿cuántos paquetes compró?

Alumna 2: Nueve

Maestra: Ese nueve qué le harías. Dice tu compañera que tiene que elaborar una tabla. Pero, ¿cómo lo establecerías? […]

Alumno 3: Mil cuatrocientos treinta y nueve (1 439)

Maestra: Y entre qué lo vas a dividir, ¿y los adicionales? [Siguen discutiendo]

Maestra: Otra vez, un paquete no te puede costar $75. Es adicional. Vamos a considerarlo como un aumento […] ¿Cómo te quedaría tu ecuación? Nuestro tema, ¿qué dice? [los estudiantes leen lo que la maestra dictó al inicio de la clase] por lógica tenemos que sacar una ecuación [...] Muchos ya se fueron a tabular, ¿qué vas a tabular? Yo quiero ver nada más el planteamiento.

[Fragmento 3, sesión 1]

Las intervenciones de la maestra [fragmentos 2 y 3] orientan la clase hacia identificar la incógnita, las relaciones entre los datos y la incógnita, y la igualdad. Nuevamente, mantiene su objetivo principal para esta sesión: obtener una ecuación que modele el problema (KMLS). En este momento ella se enfrenta a otro problema didáctico, pues los estudiantes siguen obteniendo distintos resultados numéricos sin encontrar ninguna ecuación.

Una de las alumnas encuentra una ecuación y la maestra le pide que pase al pizarrón. La alumna escribe "$9x + 75 = 1400$". La maestra elige socializar en el grupo esta solución y, al mismo tiempo, deja sin discutir soluciones diferentes, como las numéricas obtenidas mediante ensayo y error. Así, la maestra privilegia la ecuación resultante de la traducción del problema (y su solución numérica), sin importar las técnicas que se puedan usar para resolver la ecuación, con lápiz y papel o con CAS (presencia de conocimientos KMT y KFLM).

Después de planteada esta ecuación (objetivo principal de la clase), la maestra pide a los estudiantes que la resuelvan, dándoles libertad de tiempo y de elegir usar calculadora o lápiz y papel. Para Clementina, el uso de CAS es opcional. Se trata de la estrategia que define el *uso que se da a la tecnología*.

Una vez resuelta la ecuación pasa a los equipos para presentar sus soluciones, en su mayoría son numéricas. Entonces elige a una alumna que resolvió la ecuación algebraicamente, paso a paso y con lápiz y papel. Esta solución se muestra en la Figura 2(a).

Al percatarse de que la mayoría de los alumnos no están de acuerdo con el valor $x = 147.22$, pregunta qué soluciones encontraron. Aquí la maestra pone en marcha otra de sus estrategias: usa las producciones de sus estudiantes (*rol de los estudiantes)* para contrastarlas, confrontar errores y procedimientos (los últimos en este caso) y hacer aclaraciones (presencia de KFLM y KMT).

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

9x + 75 – 75 = 1400 – 75 9x = 1325 9x/9 = 1325/9 **x = 147.22** 147.22 x 9 + 75 = 1400 (a)	75 1400.00 725 /9 = 80.55 (residuo 1) x 9 - 675.00 675 0725.00 **R = 80.55** (b)

Figura 2. Soluciones propuestas (a) algebraica y (b) numérica

Ante las dudas que siguen manifestándose, la maestra promueve que los alumnos expongan sus soluciones. Los estudiantes tienen claro que ella había pedido que plantearan una ecuación que modelara el problema, por eso preguntan "¿pero con ecuación?". Entonces, la maestra elige a una alumna que obtuvo una solución numérica, la de la Figura 2(b). Al parecer, el procedimiento de la alumna es aritmético: deshace las operaciones. La maestra aprovecha esta solución para indagar, preguntando: "¿cada paquete dices que cuesta?" Y La alumna responde "$80.55". Posiblemente, la maestra identifica que la diferencia entre los dos procedimientos está determinada por el lugar en que se pone el paréntesis. Es decir, las ecuaciones correspondientes a los procedimientos de la figura 2 serían: $9x + 75 = 1400$, la primera; y $9(x + 75) = 1400$, la segunda. En esta intervención la maestra da muestra de su conocimiento de cómo los alumnos están interactuando con la ecuación y las ideas matemáticas (jerarquía de operaciones, asociatividad) que están detrás de estas propuestas (KLM). Quizás por ello, después de la explicación, pasa a la alumna que resolvió algebraicamente la ecuación para corregirla. Sin embargo, esta alumna agrega paréntesis a la comprobación: (147.22 x 9) + 75 = 1400, para obtener la respuesta correcta. La maestra dice que no se trata de ver quién está bien, sino de quién tiene el procedimiento válido. En sus palabras: "¿Cuál de los dos procedimientos creen ustedes que conviene? Repito: no es por mayoría."

En las intervenciones de la maestra, se evidencia que está enfocada en la estrategia didáctica que le permite enfatizar *el rol de los alumnos*, promoviendo la comparación de las distintas interpretaciones de las relaciones entre los datos y la incógnita del problema que los estudiantes han hecho. Los alumnos se enganchan en esta comparación, dan argumentos tanto a favor como en contra. En nuestro análisis identificamos que la maestra hace explícitas y pone a discusión dos interpretaciones de la palabra "adicional": 1) *adicional por paquete*, esto es, $9(x + 75)$; y 2) *adicional por los nueve paquetes*, $9x + 75$.

En términos de la riqueza de la discusión matemática que los alumnos desarrollan en esta parte de la clase, el problema ha sido fructífero: hay argumentaciones, comprobaciones, se usan los distintos medios tecnológicos y las distintas técnicas (CAS y lápiz y papel). Pero, en este momento, el tiempo de la clase prácticamente se ha agotado; así que el objetivo central de la clase ha quedado incompleto en lo que se refiere a "Relacionar una fórmula con la tabla de datos que genera y con su gráfica". La maestra intenta hacer un cierre de la discusión preguntando lo siguiente:

Maestra: ¿Cuál de los dos planteamientos o soluciones (procedimientos) consideran ustedes que es el correcto, de los problemas?
Alumnos: Los dos.
Maestra: Esto quiere decir que alguno de los dos está fallando [...] No necesariamente tienen que ser exactitos sin sobrar [...] Vamos a redondear [...], a uno le faltan dos centavos y al otro, cinco centavos […] Puedes perder décimas.

[Fragmento 6, sesión 1]

Clementina explica que los dos procedimientos tendrían que dar el mismo resultado y que no es el caso. En su argumentación apela a la unicidad de la solución de una ecuación, tema que al parecer

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

no ha sido abordado en la clase. Tampoco es algo que haya sido considerado en su planeación (posible deficiencia en KMLS).

Hasta antes de este momento, la maestra había entretejido las estrategias de *mantener la planeación* y la del *rol de los alumnos* (manifestaciones de KMT y KFLM). Sin embargo, en este momento toma la decisión de modificar la planeación de su clase adaptándola a las necesidades de sus alumnos, a sus interpretaciones generadas tanto con lápiz y papel como con CAS. En los minutos restantes permite que los alumnos usen estrategias de solución en las que se sienten más cómodos y confiados, no necesariamente los típicos algebraicos (como el despeje de la incógnita). Abre espacios para que la alumna que planteó la ecuación y la alumna que propuso la interpretación aritmética expongan nuevamente al grupo sus interpretaciones y cómo obtener la solución. La maestra le pide a la alumna del procedimiento "aritmético" (Figura 2 (b)) que explique, en el pizarrón. Esta alumna dice que con otra compañera llegaron a la conclusión de que su procedimiento es correcto.

Alumna: Es que ahí en el problema no se comunicaba si eran 75 por cada uno o por todos. Y aquí ya comprobamos que si eran 75 por todos. Porque no puede ser por cada uno porque no queda, serían 1447.95

[La maestra pide a varios equipos que le lean el problema a la alumna para aclarar si los 75 eran por todos por cada uno.]

Maestra: ¿Habla [se refiere al enunciado] del paquete o de todo?

Alumna: Al enunciado le hizo falta una palabra.

Maestra: ¿Cuál sería?

Alumna: Que te dijeran que son 75 pesos adicionales por cada paquete [...]

Maestra: Para eso sirven los problemas, para ver cuando no están bien planteados, cada alumno lo va a resolver de diferente forma… Aquí de lo que se trata, hay que leerlo…

Alumna: si yo fuera maestra este problema tendría dos objetivos… No sólo es leer sino establecer las relaciones entre los datos y la solución.

[Fragmento 6, sesión 1]

Grupalmente, los niños llegan al acuerdo que los 75 adicionales son por los nueve paquetes, y que entonces la ecuación correcta es: $9x + 75 = 1400$. La maestra despliega un conocimiento de la enseñanza que le resulta efectivo en este momento: "cede" el control de la clase a sus estudiantes.

Reflexiones Finales

En el desarrollo de su clase, Clementina se enfrentó a un problema didáctico no previsto en su planeación debido a la redacción ambigua de la situación problemática planteada. Es por ello que hizo adaptaciones al objetivo de la clase, a su planeación y a la participación y los roles que tenía contemplados para sus estudiantes. Además, en este proceso, Clementina adaptó su propio rol, modificó sus expectativas, sus intervenciones e incluso cedió temporalmente el rol de "maestra hipotética" a una de sus estudiantes. Posibilitó el consenso entre el colectivo, cediendo el control de la clase a los estudiantes, y logrando establecer el significado de adicional y su implicación en la ecuación ($9x + 75 = 1400$). En el cierre de la clase retomó el objetivo planteado inicialmente, ubicándolo en el trabajo realizado y sin dejarlo a la deriva. Este tipo de adaptaciones de la planeación, del problema, de los objetivos, de las formas de participación de los estudiantes, pero también de las intervenciones y del rol mismo del profesor requieren de gran flexibilidad y adaptabilidad en los conocimientos especializados de los profesores. Consideramos que esta flexibilidad y adaptabilidad no son previsibles ni tematizables como contenidos a desarrollarse en programas de estudios de formación inicial. Para adquirirlos es necesario construirlos en la práctica. Indagar a mayor profundidad sobre estas estrategias y la interacción entre distintos tipos de conocimientos, puede tener implicaciones fructíferas para la formación de profesores, así como para

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

la propia investigación en el área.

Agradecimientos

A PRODEP-SEP por el financiamiento del proyecto 23244-UPN-CA-100.

We present results of the analysis of knowledge used by a secondary school mathematics teacher in her classroom practice. This knowledge takes shape and is displayed as specific teaching strategies in the management of her class when she incorporates Computer Algebra Systems. Based on observations of regular classes, we find that her knowledge (mathematical, pedagogical and technological) is put into action at various moments during the lesson and through a variety of teaching strategies. These strategies depend on many factors, such as the planned objective of the lesson, the specific moment in the class, student participation, and the use of technological tools. Within such complexity, the teacher applies her teaching strategies in a flexible way, and manages to control and even modify the course of her class.

Keywords: Mathematical Knowledge for Teaching, Algebra and Algebraic Thinking, Middle School Education, Technology

Introduction

To approach the professional knowledge and practices of teachers of mathematics, several methodologies and frameworks for analysis have been suggested (Ball, Thames and Phelps, 2008; Ponte and Chapman, 2006; Gaeber and Tirosh, 2008). Ponte and Chapman (2006) propose the importance of considering the complexity of this sort of knowledge and its close relation with practice, working conditions and explicit and implicit objectives. Davis (2014) notes that the knowledge required by a mathematics teacher is a complex network where there is interaction between "a sophisticated and largely enactive mix of various associations /instantiations of mathematical concepts and an awareness of complex processes through which mathematics is produced" (P. 155). In fact, "the most important knowledge for teaching tends to be enacted and tacit" (p. 155).

With respect to the research on the use of digital technology (DT) in the teaching of mathematics, incorporating Computer Algebra Systems (CAS) into classrooms has been discovered to generate change in mathematical practice (Pierce and Stacey, 2004), and the teacher has a key role in providing conditions that help students understand mathematics with these tools (McFarlane, Williams and Bonnett, 2000).

We chose to study the teaching of algebra with CAS because it can be used to give meaning to algebraic transformations and expressions. Many investigations have provided solid evidence that technology can be an active element in building algebraic knowledge (Puig & Rojano, 2004; Hitt and Kieran, 2009; Kieran and Drijvers, 2006; or by Solares and Kieran, 2013.) We seek to understand how teachers mobilize this knowledge (mathematical, pedagogical and technological) and how they make sense of it in terms of their practice (Ponte and Chapman, 2006). We specifically want to know how pedagogical and mathematical knowledge is put into action during a lesson where CAS is used; and how this knowledge is revealed through teaching strategies.

Theoretical Perspective: Mathematics Teacher's Specialized Knowledge

We have taken into account the *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) model (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013) as a starting point for analysis and in our consideration of the specificity of the knowledge that teachers put into action when they teach school algebra.

This model refers to the mathematics teacher's specific knowledge, which consists of two domains: Mathematical Knowledge (MK) and Pedagogical Content Knowledge (PCK). The first domain is composed of three subdomains: Knowledge of Topics, of the Structure of mathematics and of the Practice of Mathematics. The second, Pedagogical Content Knowledge is composed of: Knowledge of Mathematics Teaching, of Features for Learning Mathematics and of Mathematics Learning Standards.

We concentrated on the second domain (PCK) due to the characteristics of our research objective. Its three subdomains are briefly described as follows: *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) is the integration of mathematics and teaching. "It is the kind of knowledge of resources from the point of view of their mathematical content or the knowledge of approaching a structured series of examples to help pupils understand the meaning of a mathematical item" (Carrillo et al, 2013, p. 2991); *Knowledge of Features for Learning Mathematics* (KFLM) include theories and models of how student learn mathematics, that is to said, how certain concepts are learned, intuition, mistakes, and the way students interact with specific mathematics content; and finally, *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS) refers of "curricular specifications, the progression from one year to the next, conventionalized materials for support, minimum standards and forms of evaluation […] We include objectives and measures of performance developed by external bodies such as examining boards, professional associations and researchers" (Carrillo et al, 2013, p. 2991).

In our research, we focus on the knowledge that teachers display within classroom practice and that acquires a specific form as teaching strategies that they modify as they manage their lessons.

Methodology

Three researchers participated in the analysis of videos of a voluntary secondary school mathematics teacher in Mexico. The teacher had already participated in a 20-hour workshop on CAS with calculators (TI-82). In general, the workshop was about solving algebra problems using functions such as *factorize, develop, solve* and *evaluate*. The workshop discussion was centered on the various ways in which an algebra problem can be solved with a calculator, as well as when it is adequate to use CAS in the classroom, how and why. We decided to observe and make video recordings of two of the teacher's regular classes, without a prior decision by the researchers about the topic and how it would be treated from a pedagogical perspective. During the workshop, it was clear that the teacher knew the rules for CAS, as well as the skills to explore new situations related to these rules and propose new uses to students. It should be mentioned that a previous study (García-Campos & Rojano, 2008) states that in order for CAS to impact teaching practices, it is necessary to provide more support for teachers, because in the short term, they do not incorporate CAS on a daily basis in the classroom.

In this report, we focus on the results of the analysis of the practice of Clementina, a teacher who, at the moment of our research, had more than 20 years of experience teaching at secondary school level, had good proficiency of the mathematical topics to be covered, and was familiar with the elements of a calculator that allow a variety of simultaneous representations of algebraic objects (tables, graphs, expressions), and the instructions to solve equations.

Data analysis was developed using a transcription of the episodes selected by the three researchers once they had identified the pedagogical content knowledge expressed by means of the following teaching strategies.

Teaching Strategies as an Approach to Aspects of Pedagogical Content Knowledge (PCK)

We propose the following three teaching strategies that result from a broader study in which we have been working by analyzing videos of secondary school mathematics teachers. The strategies have been identified in these classes and account for some of the specialized knowledge that teachers

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

generate and enact when they are teaching. The results of this investigation shall be published in detail in the future.

In the analysis of the videos of Clementina's lessons, we identified that her specialized knowledge was clear in three teaching strategies:

- Maintaining the lesson plan. This involves making decisions to keep the lesson going in such a way that the learning objectives determined by the teacher according to curriculum content and available resources are achieved. Examples of these decisions include: choice of solutions, procedures and mistakes to discuss or show to the entire group, summaries, assessments, formalizations, etc. The emphasis is on the teacher's knowledge of the KMT and KMLS subdominions.
- The role given to students. Teacher can promote various forms of participation in the same class (KMT). For example, students can be invited to explore and share solutions, to come to the board or use CAS (with the TI presenter), to explain procedures, solutions or hypothesis, or simply to follow instructions.
- The use of technological tools. Teacher proposes the use of technological resources available to verify results, explore procedures and solutions, apply techniques, etc. (KMT and KFLM).

Analysis and Discussion. The Case of Clementina

The results of the use of teaching strategies to account for the type of knowledge promoted in class by Clementina, are presented below. Our analysis allows us to describe how the components of MTSK come together. The teacher has a detailed and precise plan for the use of CAS in her class. She has prepared a specific problem, which she apparently wrote herself. Both planning and progress of the class show proficiency and experience in the solution of linear equations (KMLS), how to teach them (KMT), and the various ways her students will approach the task proposed (KFLM).

Brief Description of the Teacher's Actions in The Lesson

At the start of the session, the teacher dictates the problem and the objective of her lesson plan, and provides the instructions regarding how to work in the lesson, as shown in the following fragment.

> Teacher: Linear equations. General aim: Solving literal equations. Relating a formula to a table of data and its graph.
> Problem: We buy 9 packs of books that have an additional cost of $75 at a store [sic]. How much does each pack cost if the total price is $1400?
> Teacher: Read the problem. When you have posed it, you can use the calculator to find the solution. You can work on your own, or in groups of two, three or as many as there are at each table.
>
> [Fragment 1, Session 1]

Although her classes are very well structured and they develop according to a well-defined plan, we observe that Clementina always provides their students a moment to read and reflect on the problem, followed by time to explore resources and strategies. Students use the calculator freely, and raise their hands when they have questions. The teacher goes around the classroom from one team to another, answering questions as they arise. We consider that this demonstrates her knowledge regarding how to learn this subject matter (KFLM).

A Teaching Issue not Foreseen in Planning

A teaching issue related to the use of the word "additional" in the sentence that formulates the

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

problem arises in the class. Students do not know how to interpret what the word refers to, and spontaneously begin to explore with specific numerical values. Then the teacher takes part in the following way:

> Teacher: Your classmate says that when you use the word *additional,* it means…
> Student: That you have to increase.
> Teacher: In this case, how much do you have to increase?
> Student: 75
> Teacher: What would your equation be like? […] What is your problem about? You are going to make a table [referring to a student] What is your table going to be based on?
> [Fragment 2, Session 1]

In Fragment 2, there are two moments at which the teacher intervenes. The first is to help translate the problem into algebraic terms; the word "additional" means to *increase* or *add* as she helped the student to realize. In the second instance, she suggests that the students should focus first on finding an equation that models the problem. In addition, she tells her students that with the equation they will be able to do the numbers, find values and build a corresponding table, which is the opposite of what they were actually doing: exploring numerical values to establish the equation. It is worth noting that in Mexico it is often observed that students first get the algebraic expression and then the table or graph. This practice is promoted by the national curricular plans (SEP; 2011).

From our perspective, the above shows that the teacher applies the first strategy: *maintaining the lesson plan.* Although the students explore the problem with numerical examples to establish the relationships posed by the problem, Clementina orients these procedures and to find the equation that models the problem (KFLM and KMT). In this way, she solves the teaching issue that arose and goes on with her lesson plan.

However, the questions and confusion continue. The teacher then invites the students to a group discussion. She picks up on the questions of one of the students to discuss and clarify them together in a group. The student has been trying several possible values for the costs of the packs of books. Apparently, he is applying a *trial and error* strategy (successive numerical approximations) to adjust the values.

> Teacher: What does your problem want to find out? [inaudible] It wants to know how much a pack costs, how many packets did it buy?
> Student 2: Nine
> Teacher: What would you do to that nine? Your classmate says she has to make a table. But how would you do that? […]
> Student 3: One thousand, four hundred and thirty-nine (1439)
> Teacher: What will you divide it by? And the additional? [Discussion continues]
> Teacher: Once again, the pack can't cost $75. That's additional. Let's consider it as an increase […] What would your equation be like? What does the general aim of the lesson tell you? [Students read what the teacher dictated at the start of the lesson], we logically have to obtain an equation [...] Lots of you have started to make tables, what are you going to tabulate?
> [Fragment 3, Session 1]

The teacher's participations (Fragments 2 and 3) orient the class to identifying the unknown quantity, the relation between the data and the unknown quantity, and the equation. Again, she maintains the objective of her lesson: obtaining an equation that algebraically models the problem (KMLS). Now she faces yet another teaching issue as her students begin to obtain different numerical results and still haven't found an equation.

In spite of the students difficulties, one of them finds an equation and the teacher asks her to

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

come to the board. She writes "*9x + 75 = 1400*". The teacher chooses to discuss this solution with the group while she ignores other solutions, such as those obtained by trial and error. Thus, the teacher favors the equation that results from translating the problem and its numerical solution, no matter the techniques that can be used to solve it, either paper and pencil or CAS (KMT and KFLM knowledge).

Once the equation has been proposed (which was the main objective of the lesson), the teacher asks the students to solve it, giving them the time and freedom to choose a calculator or paper and pencil for this purpose. For Clementina, the use of CAS is optional. This is the strategy that defines *the use given to technology* for this lesson.

When the equation has been solved, the teacher asks the teams to present their solutions, which are mostly numerical. She then chooses a student who solved the equation algebraically, step by step, with paper and pencil. The solution is shown in Figure 2(a).

9x + 75 – 75 = 1400 – 75 9x = 1325 9x/9 = 1325/9 **x = 147.22** 147.22 x 9 + 75 = 1400 (a)	75 1400.00 725 /9 = 80.55 (residuo 1) x 9 - 675.00 675 0725.00 **R = 80.55** (b)

Figure 2. Proposed solutions (a) algebraic and (b) numerical.

When the teacher realizes that most students do not agree with $x = 147.22$, she asks for the solutions they found. Here she puts into action another of her strategies: she uses what the students have produced (role of the students) to contrast, compare mistakes and procedures, and to clarify (presence of KFLM and KMT).

As questions continue to arise, the teacher invites students to present their solutions. They understand that she had asked them to propose an equation that could model the problem, so they ask, "With an equation?". Then the teacher selects a student that obtained a numerical solution, shown in Figure 2 (b). Apparently, the student's procedure is arithmetical: she did the operations separately, written both operations and results. The teacher uses this solution to ask "What is the cost of each pack?" And the student answers "$80.55". It may be that the teacher identifies in this moment that the difference between the two procedures is the placing of brackets. In other words, the equation that corresponds to the procedure in Figure 2 (a) would be: $9x + 75 = 1400$, while for Figure 2 (b) it would be $9(x + 75) = 1400$. Now the teacher shows she knows how the students are interacting with the equations and mathematical ideas (order of operations, associativity) that are behind these proposals (KMT). Possibly due to this, after explaining, she asks the student who came up with the algebraic solution to go the board and correct the equation. However, in order to obtain the correct answer, she adds brackets to the verification: (147.22 x 9) + 75 = 1400. The teacher adds that the point is not to see who is right, but who has come up with the valid process. In her own words: "Which of the two processes do you think is convenient? Let me be clear, it's not a majority vote."

The teacher's participation shows that she is focused on the teaching strategy that allows emphasis on the *role of the students*, causing them to compare the various interpretations they have made of the relations between the data and the unknown value of the problem. The students get caught up in this comparison, arguing for and against. In our analysis we identify how the teacher makes explicit and promotes the discussion of two different interpretations of the word "additional": 1) *additional per pack,* i.e., $9(x + 75)$; and 2) *additional per nine packs*, $9x + 75$.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

In terms of the richness of the mathematical discussion carried out by the students, the problem has given fruits: there has been reasoning, verification, use of different technological media and a variety of techniques (CAS, paper and pencil). Nevertheless, at this moment class time is almost over and the main objective of the lesson is not complete with regards to "relating a formula with the data table it produces and with its graph". The teacher tries to close the discussion with the following question:

Teacher: Which of the two approaches or solutions to the problem do you consider to be correct?
Students: Both.
Teacher: This means that one of the two is not right [...] They don't necessarily have to be exactly the same [...] Let's round off [...], one is missing two cents, and the other five cents [...] You might lose a few decimals.

[Fragment 6, Session 1]

Clementina explains that both procedures should come up with the same result, and that this is not the case. She argues on the unicity of the solution of an equation, a topic that apparently has not been dealt with in class; it hasn't been considered in the lesson plan either (a possible deficiency in KMLS).

Until now, the teacher has intertwined the strategies for *maintaining the lesson plan* and the *role of the students* (manifestations of KMT and KFLM). However, she now makes the decision to modify her lesson plan and adapt it to her students' needs and to the interpretations they have come up. In the remaining minutes, she allows students to use the solution strategies they feel most comfortable and confident with, not necessarily those typically algebraic. She allows the student who proposed the equation and the one who proposed an arithmetic procedure to show their interpretations to the class on how to obtain the solution to the problem once more. The teacher asks the student with the "arithmetic" procedure (Figure 2 (b)) to explain on the board. This student says that she and one of her classmates have concluded that her procedure is right.

Student: The thing is that the problem didn't state clearly if it was 75 for each one or for all of them. And here we proved that it was 75 for all of them. Because it can't be for each one because it doesn't work, it would be 1447.95
[The teacher asks several teams to read the problem to the student to clarify if the 75 referred to all or to each one of the packs.]
Teacher: Is the sentence talking about the pack or all of them?
Student: The sentence is missing a word.
Teacher: Which word?
Student: It should tell us if it's 75 additional pesos for each pack [...]
Teacher: This is what problems are for, to see that if they are not stated well, each student will solve them in a different way… What this is about is, you have to read it …
Student: If I was the teacher, this problem would have two objectives… It's not just about reading, it's about determining the relation between the data and the solution.

[Fragment 6, Session 1]

The children of the class agree that the additional 75 pesos are for the nine packets, so the correct equation would be: $9x + 75 = 1400$. The teacher exhibits pedagogical knowledge that is effective at this moment: she "gives" control of the lesson to her students.

Final Remarks

During her class, Clementina faced an unforeseen teaching issue due to the ambiguous description of the problem situation. Consequently, she modified the class objectives, her lesson plan,

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

as well as the roles and participation she had planned for her students. In the process, she also adapted her own role, modified her expectations and participation, and even gave up her role as "teacher" to one of the students. She allowed the group to reach a consensus, giving control to her students and establishing the meaning of the word "additional" and its implication in (9x + 75 = 1400). At the end of the lesson, she went back to the initial objective, related it to the work done in class and gave it meaning. Such adaptations to the lesson plan, the problem, objectives, forms of participations of the students and even the role of the teacher require great flexibility and adaptability from teachers and their specialized knowledge. We believe flexibility and adaptability like this cannot be anticipated nor is it possible to include as a topic within a teacher training program; they can only be acquired through classroom practice. Inquiring more deeply into these strategies and the interaction between various types of teaching knowledge may have productive implications in the formation of teachers, as well as on research in the area.

Acknowledgements

To PRODEP-SEP for providing financial aid for project 23244-UPN-CA-100.

References

Ball, D; Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In *Proceedings of the CERME*, Vol. 8, pp. 2985-2994.

Davis, B. (2014). Teachers'-mathematics-knowledge-building communities. *Qué, cómo y por qué: una conversación internacional sobre el aprendizaje de profesores de matemáticas. What, How and Why: An international conversation on mathematics teacher learning.* A. Solares, P. Preciado y C. Francis (Coord). México: Universidad Pedagógica Nacional /Universidad de Calgary, Canadá. pp. 147-166.

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. *Serie Investigación en matemática educativa.* Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.

Gaeber, A. y Tirosh, D. (2008). Pedagogical Content Knowledge. Useful concept or Elusive Notion. *P. Sullivan and T. Wood (eds). Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development.* Sense Publishers. Pp 117-132.

García-Campos & Rojano (2008). Appropriation processes of CAS: A multidimensional study with secondary school mathematics teachers. En Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 1, p. 260. Morelia, México.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14*, 121-152.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of school algebra at the middle, secondary, and college levels. En Lester, F. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM.

Kieran, C. y Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International journal of computers for mathematical learning*, *11*(2), 205-263.

McFarlane, A., Williams, J. M., & Bonnett, M. (2000). Assessment and multimedia authoring–a tool for externalising understanding. *Journal of Computer Assisted Learning*, *16*(3), 201-212.

Pierce, R. & Stacey, K. (2004). A framework for monitoring progress and planning teaching towards the effective use of computer algebra systems. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 59-93. Kluwer Academic Publishers.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 461-494.

Puig, L. & Rojano, T. (2004). *The history of algebra in mathematics education. The future of the teaching and learning of algebra.* The 12th ICMI Study. Edited by Kaye, S., Chick, H. & Kendal, M. The University of Melburne, Australia. Kluwer Academic Publishers.

Solares, A. & Kieran, C. (2013). Articulating syntactic and numeric perspectives on equivalence: the case of rational expressions, *Educational Studies in Mathematics, 84*:115–148